

1. Felsefi Giriş

1.1 Gerçek Nedir Ne Değildir?

Gerçek nedir, var mıdır, varsa benden bağımsız mıdır ve ona nasıl ulaşılır? Doğru nedir? “Anlamak” ne demektir? Bir şeyi nasıl anlarız ve anladığımızı nasıl anlarız? Düşünmek ne demektir? Bazı verilerden bir başka sonuç nasıl ve hangi kurallara göre çıkarılır? Kanıt nedir? Kanıtlanan şey illa doğru olmak zorunda mıdır? Bu ve benzeri soruları sürekli sormadan, verilen yanıtları sürekli sorgulamadan tam anlamıyla matematikçi olunamaz.

Her matematikçi bu soruların yanıtlarını vermelidir demiyoruz, çünkü bunlar yanıtsız sorular da olabilir, biz sadece matematikçinin bu konularda sürekli düşünmesi ve kendi kendine tartışması gerektiğini söylüyoruz.

Matematikçi, ne de olsa doğruyu bulduğuna inanır, doğru mantıkla, doğru akıl yürütmeye yanlış yapamayacağını ve böylece gerçeğe yaklaştığını düşünür. Gerçek hakkında bir şeyler söyleyen matematikçinin gerçek hakkında düşünmesi gerekir. Bu da ister istemez yukarıdaki soruları sordurtur.

Ahmet’in ya da Ayşe’nin gerçeği (ya da doğrusu) değişik olabilir, Ahmet ve Ayşe olayları farklı yaşayabilirler. Gerçek, kişiden kişiye değiştiği gibi coğrafyadan coğrafyaya da değişir: Türkiye’nin gerçeğiyle ABD’nin gerçeği bir olamaz. Gerçek, kişiye ve coğrafyaya göre değiştiği gibi zamana göre de değişir: Ortaçağ’ın gerçeğiyle bugünün gerçeği bir değildir.

Bunlar herkesin bildiği, kıraathanede bile duyabileceğimiz beylik sözler. Herhalde bunlardan söz edeceğimi sanmıyorsunuz bir matematik kitabında!

Gerçeğin ve doğrunun kişiye, coğrafyaya ve tarihe göre değişeceğini söylerken, sözünü ettiğimiz gerçeğin ya da doğrunun ne olduğunu biliyor muyuz? Gerçek ya da doğru üzerine herhangi bir söz edebilmek için önce bu kavramların ne olduklarını bilmeliyiz. Tanımı bilinmeyen bir kavram üzerine ne söyleyebiliriz ki?

Demokrasi en iyi yönetim biçimidir tümcesini ele alalım. Bu tümce ne kadar doğrudur? Böyle bir ifadenin doğru olması için her şeyden önce “demokrasi”nin tanımlanması gerekir. Demokrasi tanımlandıktan sonra “yönetim biçimi” tanımlanmalı. Arkasından “en iyi” tamlaması tanımlanmalı. Ve tüm bu tanımlar yapıldıktan sonra “demokrasi en iyi yönetim biçimidir” tümcesi

kanıtlanmalı. (Ama bunun için de “kanıt”ın ne demek olduğu bilinmeli. “Kanıt” kavramı tanımlandıktan sonra “kanıtlanan” önermelerin doğru oldukları gösterilmeli, çünkü “kanıtlanmakla” “doğru olmak” eşdeğer kavramlar olmayabilir! Bu ağır konuyu geçelim.) İşimiz zor yani!

Tabii, bir başkası, “benim ‘demokrasi’, ‘yönetim biçimi’ ve ‘en iyi’ tanımlarım farklı” deyip sizin gerçek diye sunduğunuz önermeyi reddedebilir. (Hatta kanıt yönteminizi de reddedebilir.) Ama siz de buna karşı, “Bu kavramlara benim verdiğim tanımlarla (ve benim kanıtlama yöntemimle) önerme doğrudur” diyebilirsiniz. Eğer kanıtınız doğruysa kimse buna karşı çıkamaz. (Kanıtın ne olduğu, bir kanıtta hangi akıl yürütmelerin yapılabileceği de gerçeğin ne olduğu konusunda yakından ilişkili bir sorudur.)

“Demokrasi”nin tanımı ne olmalıdır tartışması da kendi başına ilginç bir sorudur belki ama şu anda “tanım nasıl olmalıdır, tanımın özellikleri neler olmalıdır?” problemağıne girmek istemiyorum.

Yukarıda tanımlardan ve kanıttan sözettik. Kullanılan sözcüklerin tanımları verildikten ve tümcenin ya da önermenin anlamı iyice anlaşıldıktan sonra tümcenin kanıtlanabileceğini söyledik. Kanıt kavramı üzerine daha çok yoğunlaşmak amacıyla anlamının bilindiğinden kuşku duyulmayan bir tümceyi ele alalım: *Ankara Türkiye’nin başkentidir.* Bu tümcenin doğru olduğundan kuşkumuz yok herhalde. Ankara’nın, Türkiye’nin ve “başkent”in tanımları belli. Peki nasıl kanıtlarsınız doğru olduğunu bildiğiniz bu tümceyi? “Anayasa’da öyle yazıyor” demeniz yeterli midir? Eğer “başkent”in tanımında böyle yazıyorsa yeterlidir elbet. Ben de size “Gösterin Anayasa’yı” derim. Diyelim Anayasa’yı buldunuz, doğru sayfayı açıp önüme koydunuz. “Nerden belli bunun gerçek Anayasa olduğu” diye sorabilirim size. O zaman birlikte Ankara’ya gideriz, TBMM tutanaklarına bakarız. Milletvekillerinin imzaları orada, hepsi Ankara’yı başkent ilan etmişler. Bu kez “Nereden belli bu imzaların sahte olmadığı?” diye sorarım size...

Hiçbir biçimde Ankara’nın Türkiye’nin başkenti olduğunu kanıtlayamazsınız. Tüm Türkiye tek bir ağızdan “Ankara Türkiye’nin başkentidir” diye bağırırsa, gene de ikna olmam. Büyük bir olasılıkla öyledir, Ankara gerçekten Türkiye’nin başkentidir ama yüzde yüz ikna edilemem. Belki benim tuhaf bir hastalığım vardır, bu öyle bir hastalıktır ki, Türkiye’nin başkentinin Ankara olmadığını öğrendiğim anda öleceğim... Herkes bunu biliyor ama ben bilmiyorum. İsterseniz paranoya deyin, ama içime öyle bir kuşku düşüverdi birden. Öleceğimi bildiğinizden ve ölmemi istemediğinizden bana numara yapıyorsunuz, bana oyun oynuyorsunuz. Çocukluğumdan beri kandırılmışım... Benim için özel gazeteler basılmış, özel haritalar çizilmiş... Hâlâ daha kandırıyorsunuz... Yutmam!

Elinize bir elma alın. Bu elmayı bırakırsanız ne olur? Elma düşer. Öyle mi? Nereden biliyorsunuz elmanın düşeceğini?

Bırakırsınız elmayı, elma gerçekten düşer.

– İşte, dersiniz bana, elma düştü.
Gerçekten de elma düştü. Gözlerimle gördüm. Haklıymışsınız.
– Peki... Bir daha bıraksanız ne olur acaba?
– Gene düşer elbet!
– Nereden belli?
– Çünkü hep düştü!
– Biliyorum hep düştüğünü, ama bundan sonra ne olacak acaba?
– Gene düşecek...
– Nereden biliyorsunuz hep düşeceğini?
– Bugüne kadar hep düştü, bundan sonra da hep düşecek...
– Bugüne kadar elmanın hep düşmesi bundan sonra da elmanın hep düşeceği anlamına gelmez ki!

– Gelir...
– Neden?
– Çünkü aynı koşullarda tekrarlanan deneyler aynı sonuçları verir...
– Neden?
– Bu bir ilkedir, fizik ilkesi! Bunu da mı bilmiyorsun!
– Biliyorum ya da bilmiyorum... Ama siz nereden biliyorsunuz bu ilkeyi?
Bu ilkeye göre ben hiç ölmeyeceğim, çünkü bugüne dek hiç ölmedim!

İşte burada çuvallarsınız. Aynı koşullarda tekrarlanan deneylerin aynı sonuçları verdiğini kanıtlayamazsınız. Dolayısıyla elmanın da hep yere düşeceğini kanıtlayamazsınız.

Bir gün bir içki masasında bu konulardan söz ederken, hatta önümüzdeki şişenin var olup olmadığından bile emin olamayacağımızı söylerken, bir arkadaşım,

– Şimdi, dedi, kafana geçiririm bu şişeyi, anlarsın şişenin gerçek olup olmadığını!

Çok komik! Ben dahil hepimiz güldük. Konunun derinliğine yakışan ciddi-yete geçtiğimizde şöyle yanıtladım arkadaşımı:

– Kafama bir şey geçirmişsindir ve ben sersemlemişimdir. Bundan benim kuşkum olmayabilir. Ama, bir, kafama gerçekten şişe mi geçirdin? İki, kafama gerçekten bir şişe geçirmiş olsan bile, bunu başkalarına kanıtlayabilir miyiz? Senin bu eylemini filme alıp cümle âleme göstersek bile, filmin sahte olduğunu öne sürüp inanmayanlar olabilir. Saddam'ın yakalandığına bile inanmayanlar var, sahtesinin yakalanmış olacağını öne sürüyorlar! Başkasını ikna edemediğin bir önerme gerçek addedilebilir mi? Gerçek, başkasını ikna edebildiğin ölçüde gerçektir!

Bu son söylediğim gerçeğin bir tanımı olabilir mi? Felsefi anlamda bilmiyorum ama matematiksel anlamda “gerçek”, istisnasız herkesi doğruluğuna yüzdeyüz ikna edebileceğimiz önermedir.

Sanırım Descartes'ın “Düşünüyorum demek ki varım” akıl yürütmesinden söz etmenin tam yeri. Modern felsefenin kurucusu sayılan Descartes, var

olduğundan kuşku duyar. Belki bir rüyadadır, belki hayal görüyordur, belki Tanrı ya da tanrılar onu kandırıyorlardır. Var olduğunu, hiç kuşku duymayacağı biçimde, duyularından bağımsız olarak ispatlamak ister. Bunun için de her şeyden kuşku duymalıdır, herhangi bir gerçeği önbilgi olarak kabul etmemelidir. Yani Descartes hiçten yola çıkarak bir gerçeğe, var olduğunun kanıtına ulaşmak istemektedir. Descartes tüm bunları aklından geçirirken, birden emin olduğu tek şeyin her şeyden kuşku duyduğu olduğunu anlar. Kuşku duyuyordur, yani düşünüyordur. Demek ki bir şey var ki düşünüyor (ya da kuşku duyuyor). Buradan da meşhur, “Düşünüyorum demek ki varım” önermesi doğar.

Descartes’ın akıl yürütmesi gerçekten şaşırtıcı, çünkü hiçbir önbilgi kabul etmeden bir gerçeğe ulaşıyor...

Ama bir dakika... Descartes gerçekten bir gerçeğe mi ulaşıyor? Descartes’ın varlığından kim emin? Descartes emin! Ya bizler? Acaba bizler de Descartes varlığından Descartes’ın kendisi kadar emin miyiz? Aynen Descartes’ın sunduğu gerekçelerden dolayı doğrusu ben Descartes’ın varlığından emin olamıyorum. Ya Descartes beni kandırıyorsa, ya gerçekten düşünmüyorsa, nereden biliyorum Descartes’ın düşündüğünü? O söylüyor diye mi? Descartes’a neden güveneyim ki? Bu akıl yürütmeye Descartes kendi varlığından emin olabilir belki ama bize var olduğunu kanıtlayamaz. Çünkü Descartes’ın akıl yürütmesinde “ben”, yani “benlik duygusu” önplandadır. “Ben” kuşku duyuyorum... “Ben” düşünüyorum... Oysa ben Descartes değilim ki! Bu yüzden Descartes’ın (bu çok değerli) argümanı benim için geçerli değil Kanıtın amacı sadece ikna olmak değildir, ayrıca başkalarını da ikna edebilmektir.

Descartes’ın fikrinden devam edelim. Descartes kendi varlığını kendine kanıtladı belki ama bizi ikna edemedi. Öte yandan bize insanın kendine kendi varlığını kanıtlayabileceğini gösterdi. Demek ki orada biri var ki bize bir şey öğretiyor... Descartes mı kimdir nedir bilemem ama şeyler bana akıl veriyor.

Sonuç olarak bizim dışımızda bir dünya olduğu bariz. Hepimiz -ayrı ayrı- böyle bir dünyanın varlığından eminiz. Etrafımız Descartes ya da elma diye adlandırdığımız bazı tuhaf şeylerle dolu. Bizim dışımızda bir dünya var da, o dünya nedir ve nasıl anlaşılır?

Bizim dışımızdaki dünyayı durduk yerde anlamamız imkânsızdır. Biz ancak bu anlaşılmaz dünyanın daha başa çıkılır bir kopyasını zihnimizde kurarak dünyayı anlamaya çalışabiliriz. Yani gerçek gerçeğe ulaşamayız belki ama zihinsel bir gerçek kurarak gerçek gerçeğe ulaşmaya çalışabiliriz ya da ulaştığımızı iddia edebiliriz. Kurduğumuz dünyanın bu kopyası sayesinde uçağa binebildiğimize göre, bu iddiamız tamamen yanlış değil.

Anlaşılabilir ve başkasına aktarılabilir tek bir gerçek vardır, o da matematiksel gerçektir. Bu anlamda başka gerçek yoktur, olamaz. Matematiksel gerçeği de sadece zihnimizde algılarız. Zorunlu olarak...

Bu ve bir sonraki ciltte [N3] okuyacaklarınız çağımızın matematikçilerinin gerçek gerçeği zihinlerinde nasıl canlandırdığıyla ilgilidir.

Önümüzdeki birkaç bölümde doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı inşa edeceğiz ve örneğin, $2+2=4$ “gerçeği”ni matematikçilerin nasıl algıladıklarını göreceğiz. Daha sonra başka sayı sistemlerini inşa edeceğiz. Bir sonraki ciltte bildiğimiz sayılar dünyasını biraz açacağız, bir tür sonsuz sayılarla ilgileceğiz.

Şaşırtıcı bir dünyanın sizleri beklediğine dair güvence verebilirim.

1.2 Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?

Bu kitapta sayıları “anlayacağız.” İlk olarak doğal sayılardan başlayacağız. “Sayıları anlamak” deyince, sanki bizim dışımızda bir yerde, çok belirgin ve fiziksel bir biçimde sayılar var da biz onları anlamak istiyoruz gibi bir anlam çıkabilir.

“Anlamak” üzerine düşünelim biraz. Anlamak ne demektir? Neyi, nasıl ve ne dereceye kadar anlayabiliriz? Anlama çeşitleri nelerdir? Bu tür sorularla ilgileceğiz bu altbölümde. Derin felsefe... Daha derini yok! Ya da ben bilmiyorum.

“Sayıları anlamak”la “zürafaları anlamak” arasında bir ayrım var mı? Var gibi... Zürafalar orada. Karşımdalar. Otluyorlar, geziniyorlar, koşuyorlar. Görüyorum onları. Zürafaların sindirim sistemini anlamaya çalışabilirim örneğin. Çünkü o sindirim sistemi orada. Benden bağımsız bir biçimde var.

Oysa sayılar ortalıkta görünmüyorlar. Ben hiç beş görmedim hayatımda, bundan sonra da görmeyeceğim. Şimdiye kadar kimse “çok güzel bir beş geçti kapımın önünden” dememiştir, çünkü beş geçmez, beş yürümez, beş kırılmaz, beş uçmaz, beş susamaz, acıkmaz, yaşlanmaz, ölmez... Beş hiçbir şey yapmaz! Oysa zürafa bir şeyler yapar...

Zürafa orada. Bu çok belli. Oysa beş’in ne kadar orada olduğu pek belli değil.

Zürafayı alr karşıma incelerim, ama ya beş’i?

Her ne kadar “beş zürafa” bir anlam ifade ediyorsa da, tek başına “beş”in ne anlama geldiği o kadar belli değil.

“Beş zürafa” bir anlam ifade ediyor mu dedim? Yanıldım galiba... “Bir zürafa”nın anlamı ve hatta fiziksel varlığı bile tartışılabilir, çünkü o “bir zürafa” durmadan değişmektedir. O durmadan değişen zürafaya sanki hiç değişmemiş, sanki sabit bir varlık gibi “zürafa” denmesi tam gerçeği yansıtmaz. Her zürafa bir diğerinden farklıdır ve her zürafa her an değişir. “Bir zürafa” değil, durmadan değişen zürafalar vardır! Hatta daha doğmamış zürafalar bile vardır! Dolayısıyla aslında “zürafa” da bir kavramdır. “zürafa”, “zürafa” adını verdiğimiz durmadan değişen varlıkların ortak adıdır. “Zürafa” sanıldığından daha soyut bir şeydir.

Peki zürafa bir kavramsa, “beş zürafa” ne demektir? Aynı kavramdan beş tane olur mu? Galiba “beş zürafa”, “zürafa kavramının kapsamına giren var-

lıkların beşi” anlamına geliyor... O varlıklar da durmadan değiştiklerinden tümüyle kavrayamayacağımız, bütünüyle algılayamayacağımız şeyler. Birini bile kavrayamazken biz beşinden sözediyoruz...

Hayvan zürafa ölür, kavram zürafa ölmez. Hayvan zürafa durmadan değişir, kavram zürafa hiç değişmez. Hayvan zürafayla kavram zürafayı birbirine karıştırmamak lazım. Kavram zürafa beş’e çok daha yakın.

Konu gittikçe karmaşıklaşıyor ve içinden çıkılmaz bir hal alıyor.

Neyse ne!.. Sonuç olarak zürafa ne de olsa zürafadır. Oradadır. Yadsınamaz bir biçimde, ya da çok zor yadsınır bir biçimde... Oysa sayılar bir zürafa kadar orada değiller.

Sayıları göremiyoruz diye sayılar yok diyebilir miyiz? Belli ki sayılar var. Bakın, sözünü ediyorum şimdi ve anlaşıyoruz. Sayılar, hiçbir yerde olmasalar bile beynimizde varlar. Zihinsel bile olsalar varlar. Zürafalarla aynı düzlemde değil belki ama “beş” de var. Descartes yazsaydı bu satırları, “beş’i düşünüyorum demek ki beş var” derdi. Haklı olarak...

Çoğu insanın bir elinde beş parmak vardır. Bunu herkes bilir. Demek ki hepimizin uzlaştığı bir beş kavramı var. İçinde “beş” geçen bu önermeyi hepimiz anlıyoruz ve doğru buluyoruz. Demek ki “beş”e ortak bir anlam verebiliyoruz. Tüm insanların beş’e ortak bir anlam vermeleri, herhalde ancak beş’in bizden bağımsız bir biçimde var olmasıyla olabilir.

Kaldı ki, beş kavramı birbiriyle hiç ilişkisi olmamış uygarlıklar tarafından birbirinden bağımsız olarak da bulunmuştur. Demek ki bizim dışımızda bir yerde var bu “beş”... Öyle olmalı... Beş var ki, biraz düşünebilen her uygarlık belli bir seviyeye gelince beş’i kavrayıyor ve kavram olarak benimsiyor.

Akıllı uzaylılar varsa, onlar da beş kavramını bir süre sonra yaratırlar/bulurlar. Mutlaka... Öyle sanıyorum. Beş kavramı sadece dünyamıza özgü değil. Tüm evrende, doğada, her yerde olan bir kavram.

Galiba “beş” salt zihinsel değil... O da orada, bizim dışımızda bir yerde. Tam nerede bilmiyorum ama oralarda bir yerlerde bir “beş” olmalı. Görmesek de, dokunmasak da o beş bizim beşimizdir. Beş’in kendisi olmasa (“beş’in kendisi” ne demekse!) bile beş kavramı benim dışımda bir yerde var. Sadece düşünce olarak var -başka türlü var olamaz- ama var... (Benden bağımsız düşünce olabilir mi doğada? Felsefi soruların şahı!) Var ki hepimiz anlaşıyoruz beş konusunda.

Belki de doğa bana “beş beş beş” diye fısıldıyor ve ben beynimi kullanarak o beş kavramını yaratıyorum/buluyorum.

Sayıları anlamak gibi son derece masum bir uğraş bizi varlık ve yokluk gibi çok derin felsefi sorulara götürdü...

Sorularıma tam yanıt veremedim. Birtakım çıkarımlarda bulunup sayıların orada bir yerde oldukları sonucunu çıkardım ama bu çıkarımlarımdan ben de pek emin değilim, yüzde yüz ikna olmadım, ben ikna olsam da sizi ikna edemiyor olabilirim.

Matematik dünyasından çok çıktık...

Yanıtını bulamadığımız sorularla zaman harcamayıp devam edelim...

Doğada var ya da yok, beş'i anlamak istiyorum. Beş'i anlamak için önce beş'in ne olduğunu bilmeliyim. Yani beş'i tanımlamalıyım.

Bir deneme yapalım: Beş'i bir elin parmak sayısı olarak tanımlayalım. Bir an için bu tanıma kabul edip beş'i anlamaya çalışalım...

Beş'i tanımladıktan sonra beş'i anlamak ne demektir sorusu geliyor aklı. Beş'in nesini anlayacağım? Beş'i tek başına değil, beş'in öbür sayılarla olan ilişkisini anlamak istiyorum. Örneğin $5 + 3$ 'ü bulmak istiyorum. "Üç parmak"ı da tanımladığımızı varsayarak, $5 + 3$ sayısını beş parmağın yanına öbür elin üç parmağı daha geldiğinde elde edilen parmak sayısı olarak tanımlayabiliriz.

Nitekim beş parmağınızın yanına öbür elinizin üç parmağını getirseniz sekiz parmak elde edersiniz. Deneyin göreceksiniz. Tekrar tekrar deneyin, hep aynı sonucu, "sekiz parmak" sonucunu alacaksınız. Ancak bir sorun var burada. Deneyerek gördüğünüzü kanıtlayamazsınız. Beş elmayla üç elmayı yan yana koyduğunuzda sekiz elma elde edeceğinizi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız. Çünkü önermeniz deneye bağlı. O deneyin sonsuza kadar aynı sonucu vereceğini kanıtlayamazsınız. Dikkatinizi çekerim: Beş elmayla üç elmayı yan yana koyarsanız sekiz elma elde etmezsiniz demiyorum, sadece bu önermenizi kanıtlayamazsınız diyorum. Fiziksel deneyler matematiksel anlamda kanıtlanamazlar. "Beş elmanın yanına üç elma daha koyarsam sekiz elma elde ederim" önermesi olsa olsa (yapılmış) her bir deney için kanıtlanır, tüm genelliğiyle, gelecekte yapılacak deneyler için kanıtlanamaz. "Böyle gelmiş böyle gider" geçerli bir kanıt yöntemi değildir. En azından matematikte...

Oysa matematik kanıtlar. $5 + 3 = 8$ eşitliğini kanıtlamalıyız... Kanıtlamadan olmaz.

Ayrıca "beş"i bir eldeki parmak sayısı olarak tanımlasam, çok çok büyük sayıları nasıl tanımlayacağım? Hatta genel olarak "sayı" kavramının kendisini nasıl tanımlayacağım? Bir, iki, üç, dört, beş tanımlandı. Altıyı da tanımladık, yediyi de... Günün birinde durmam gerekecek, sonsuza kadar sayı tanımlayacak değilim ya... Sayıları teker teker tanımlamakla sayı kavramını tanımlamak arasında da bir ayrım vardır.

Ne yapacağız?

Önce şunu yapacağız: Günlük dilde kullandığımız ve aslında ne demek olduğunu bilmediğimiz beş'le bu kitapta tanımlayacağımız beş'i birbirinden ayıracağız. İkincisi matematiksel beş olacak. Matematiksel beş'in sizin elinizin parmak sayısı ile hiçbir ilgisi olmayacak, ya da çok az ilgisi olacak.

Yepyeni bir beş kavramı tanımlayacağız. Matematiksel olarak...

Nasıl yapacağız bunu?

Nasıl yapacağımız hiç önemli değil! Beş'i nasıl tanımladığımızın hiç mi hiç önemi olmayacak. Beş'i, üç'ü, sekiz'i ve toplamayı öyle tanımlayacağız ki $5 + 3 = 8$ eşitliği doğru olacak. Önemli olan, sayıları ve işlemleri nasıl

tanımladığımız değil, tanımladığımız sayı ve işlemlerin istediğimiz özellikleri sağlamaları... İşte bu, matematiği matematik yapan niteliklerin en önemlilerinden biridir. Daha doğrusu modern matematiği modern matematik yapan budur. Matematikte kavramların nasıl tanımlandıkları değil, kavramların hangi özellikleri sağladıkları önemlidir.

Matematiğin bu bakış açısı sadece sayılar için değil, her kavram için geçerlidir. Noktaların, doğruların, düzlemlerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, önemli olan bu kavramların istediğimiz özellikleri sağlamalarıdır.

İlk birkaç bölümde sıfır, bir, iki, üç gibi birkaç doğal sayıyı teker teker tanımladıktan sonra, ileriki bölümlerde genel olarak doğal sayı kümesini tanımlayacağız. Bu daha zor olacak.

İşte böyle... Doğal sayıları ve toplamaı tanımlayacağız. Tanımımız bize $2 + 2 = 4$ eşitliğini verecek. Ayrıca

$$x + y = y + x$$

eşitliğini de verecek. Çarpmayı da tanımlayacağız. Göreceğiz ki

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

eşitliği geçerli. Ayrıca $2 \times 2 = 4$ eşitliğini de kanıtlayacağız.

Görüldüğü gibi okurun bilmediği şeyler kanıtlanmayacak bu kitapta. Yani kanıtladığımız olgular değil bu kitapta önemli olan. Önemli olan yöntem, konuya yaklaşım, düşünme biçimi, tanımların ve kanıtların nasıl yapıldığı vs.