Gerçel Sayılar Grubunda Tanımlı Grup Topolojilerin Sayısı

Zafer ERCAN[1]

Doğal sayılar kümesi, tamsayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesi ve gerçel sayılar kümesi, her zaman olduğu gibi, sırasıyla, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ ile gösterilecek.

Bu yazıda okurun yabancı olmadığı varsayılan kavramlara kısaca değinilse de ayrıntılara girilmeyecektir. Bunun yanında okuyucunun ulaşabileceği kaynaklar verilecektir. Yaygın olarak bilinen bazı matematiksel ifadelerin okurlar tarafından da bilindikleri varsayılmıştır. Verilen alıştırmaların yazının hacmini küçültmesi yanında eğitici olabileceği düşünülmüştür.

1 Amaç

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı toplama fonksiyonunu t ile gösterelim. Yani

$$t(x, y) = x + y$$

olarak tanımlansın. İleri Analiz derslerinde geçen süreklilik kavramına göre t fonksiyonu süreklidir. Diğer taraftan bu anlamda verilen süreklilik bir topolojiye göre denk olarak tarif edilebilir. Dolayısıyla "$\mathbb{R}$ üzerine konulacak farklı topolojilere göre de bu fonksiyon sürekli olabilir mi?" sorusu anlamlıdır. Ayrıca bu tür topolojilerin ne kadar çok olduğununun yanıtı da anlamlı olacaktır. Bu yazının amacı bu ve benzeri konulardır. Yazının bütünlüğü, aynı zamanda da topoloji ve topolojiye göre süreklilik kavramlarının daha az bilinir olması nedeniyle bu kavram aşağıda tanımlanacaktır.

2 Birkaç Vektör Uzay Kavramı

Bir X kümesinin altkümelerinin kümesine X'nin ***kuvvet kümesi*** denir ve $\wp(X)$ ile gösterilir. Bir kümenin kardinalitesini matematiksel olarak burada tanımlamayacağız. Buna karşın iki kümenin kardinaliteleri arasındaki ilişkiyi verebiliriz: X ve Y iki küme olmak üzere X'den Y'e tanımlı en az bir birebir fonksiyon varsa $|X| \leqslant |Y|$ yazarız. $|X| \leqslant |Y|$ ve $|Y| \leqslant |X|$ oluyorsa X'den Y'e tanımlı birebir ve örten fonksiyon vardır (Cantor-Bernstein ya da Schröder Teoremi olarak bilinir) ve bu durumda $|X| = |Y|$ yazılır. $|X| = |Y|$ olmaması durumunda $|X| \neq |Y|$ yazılır. Burada geçen $|X|$'e X'nin ***kardinalitesi*** denir. $|X| \neq |Y|$ ve $|X| \leqslant |Y$ ise $|X| < |Y|$ yazılır. $\mathbb{R}$'nin kardinalitesi $\mathfrak{c}$ ile ve $\mathbb{N}$'nin kardinalitesi $\aleph_0$ ile gösterilir. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ dir. $\wp(X)$ kümesinin kardinalitesi $2^{|X|}$ ile gösterilir. Kardinaliteler hakkında geniş ve yeterli kaynak Matematik Dünyası dergisinin ilgili sayılarındadır.

Bu yazıda geçen vektör uzay reel (gerçel) vektör uzaydır. Vektör uzayda tanımlı toplama işlemi, genelde $+$ ve skalerle çarpma işlem de genelde $\cdot$ ile gösterilir. Okurun vektör uzayı, vektör altuzayı, vektör uzayın tabanı ve boyutu[2], vektör uzaylarının izomorfik olma kavramları, vektör uzayları ailesinin çarpım uzayı ve direkt toplamı gibi kavramları bildiği varsayılacaktır. Bir X vektör uzayının boyutu bir kardinal sayıdır ve $dim(X)$ ile gösterilir.[3] E vektör

[1]Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Matematik Bölümü, Gölköy Kampüsü 14280, Bolu

[2]Her vektör uzayın bir tabanının olduğu [1]'te kanıtsız olarak ifade edilmiştir. Bunun kanıtı, gerçel sayıların rasyonel sayılar üzerinde vektör uzayı olduğunun, Hamel [4] tarafından verilen, ilgili uzayın tabanı olduğunun kanıtıyla birebir aynıdır.

[3]Bu kavramın başlangıç evrelerinde vektör uzayın boyutunu Löwig [5]'de "affine dimesion" olarak adlandırmıştır. Ayrıca Löwig, bir E vektör uzayı için $\mathfrak{c} < |X|$ ise $dim(E) = |X|$ olduğunu [5] 'de kanıtlamıştır.

uzayının $A \subset E$ tarafından üretilen vektör altuzayı $span(A)$ ile gösterilir. Bir $(E_i)_{i\in I}$ vektör uzayları ailesinin çarpım uzayı $\prod_{i\in I} E_i$ ve direkt toplamı $\oplus_{i\in I} E_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $E_i = E$ olması durumunda $\prod_{i\in I} E_i$ yerine $\mathbb{E}^I$ yazarız. B bir E vektör uzayının tabanı ise E ve $\oplus_{b\in B}\mathbb{R}$ vektör uzayları izomorfiktirler. Bu konular için [3] yeterli bir kaynaktır.

Alıştırma 2.1. $\mathbb{R}$ ve $\oplus_{a\in A}\mathbb{Q}$ izomorfik olacak biçimde ve $|A| = \mathfrak{c}$ özelliğinde $A \subset \mathbb{R}$ altkümesinin olduğunu gösterin. Ayrıca B ve C kümelerinin kardinaliteleri eşitse $\oplus_{b\in A}\mathbb{Q}$ ve $\oplus_{c\in C}\mathbb{Q}$ gruplarının grup izomorfik olduklarını gösterin.

Alıştırma 2.2. A ve B kümelerinin kardinalitelerininin eşit olmalarının $\oplus_{a\in A}\mathbb{R}$ ve $\oplus_{a\in A}\mathbb{R}$ vektör uzaylarının izomorfik olması için yeterli olmadığını gösterin.

3 Biraz Topoloji

$f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, $A \subset X$ ve $B \subset Y$ için

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gösterimlerini kullanırız. Ayrıca $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ ve $\mathcal{G} \subset \wp(Y)$ için

$$f(\mathcal{F}) = \{f(A) : A \in \mathcal{F}\},$$

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\},$$

yazarız.

$\mathbb{R}$'de $x \mapsto |x|$ olarak tanımlanan mutlak değer metriğine göre toplama ve çarpma işlemlerinin sürekli olduklarını biliyoruz. Yani $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı

$$(x, y) \to x - y \text{ ve } (x, y) \to xy$$

fonksiyonları süreklidir. Bu özellikteki topoloji kavramı aşağıda verilen tanımla genellenebilir. Öncelikle topoloji ve süreklilik kavramını tanım düzeyinde hatırlayalım.

X boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tau \subset \wp(X)$ kümesine X üzerinde bir ***topoloji*** denir.

i. $\varnothing$, $X \in \tau$.

ii. U, $V \in \tau$ ise $U \bigcap V \in \tau$.

iii. Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

τ, X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) ikilisine ***topolojik uzay*** denir. Bir topolojinin elemanları ***açık*** olarak adlandırılır; açık kümenin tümleyenine ***kapalı*** denir.

(X, τ) bir topolojik uzaysa, $x \in X$ elemanını içeren açık kümelerin kümesini $\tau(x)$ ile gösterelim.

τ_X, ve τ_Y, sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde topolojiler olsunlar. $f : X \to Y$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasında sürekli olması

$$f^{-1}(\tau_Y(f(x))) \subset \tau_X(x)$$

olmasıdır. f fonksiyonu X'in her noktasında sürekliyse f'ye ***sürekli*** denir. f'nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşulun $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$ içermesinin sağlanması olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

X boş olmayan bir küme olmak üzere verilen bir $\mathcal{U} \subset \wp(X)$ kümesinin bir topoloji olması gerekmese de, bu küme, şu anlamda bir topoloji üretir: $\tau_0, \mathcal{U}$'nun sonlu elemanlarının arakesiti olmak üzere, elemanları τ_0'nın altkümelerinin birleşimi olan ve X'i içeren τ, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye $\mathcal{U}$ tarafından üretilen topoloji denir ve $< \mathcal{U} >$ ile gösterilir.

Bir vektör uzayında tanımlanan önemli topolojilerden biri norm topolojisidir: X bir vektör uzayı ve $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her x, $y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

i. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$,

iii. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

koşullarını sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna bir ***norm*** ve E'ye bir ***normlu uzay*** denir. Ayrıca her $a \in E$ ve $r > 0$ için

$$B(a, r) = \{x \in E : ||x - a|| < r\}$$

olmak üzere, $\mathcal{U} = \{B(a, r) : a \in E, r > 0\}$ tarafından üretilen $< \mathcal{U} >$ topolojisine ***norm topolojisi*** denir.

Alıştırma 3.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

i. f bir normdur.

ii. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c|x|$ olacak biçimde $c > 0$ vardır.

$\mathbb{R}$'de $\mathfrak{c}$ kadar farklı norm olmuş olsa da norm topolojisi için durum aynı değildir.

Alıştırma 3.2. $\mathbb{R}$'de yalnızca bir tane norm topolojisi olduğunu gösterin.

(X, τ_X) ve (X, τ_Y) topolojik uzaylar olmak üzere $X \times Y$'de $\tau_X \times \tau_Y$ tarafından üretilen topolojiye ***çarpım topolojisi*** denir. Çarpım topolojisiyle donatılmış $X \times X$'e, X'nin ***çarpım uzayı*** adı verilir.

E vektör uzayı bir τ topolojisiyle donatılsın ve $E \times E$, E'in çarpım uzayı olsun. $t : E \times E \to E$, $t(x, y) = x + y$ fonksiyonu sürekliyse, t'ye τ topolojisine göre ***uyumlu*** denir.

Alıştırma 3.3. X vektör uzayında tanımlı her norm topolojisinin toplama fonksiyonuna uyumlu olduğunu gösterin.

$\mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ tarafından üretilen τ topolojiyle donatılsın (bu topolojiye $d(x, y) = |x - y|$ metriği tarafından üretilen topoloji de denir).

$$t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t(x, y) = x + y$$

fonksiyonu süreklidir. Yani t, bu topolojiye uyumludur. Burada $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin $\tau \times \tau$ tarafından üretilen topolojiyle donatıldığını varsayıyoruz.

$F \subset \mathbb{R}^X$ ve $\mathcal{U} = \{f^{-1}(U) : f \in F, U \subset \mathbb{R}$ açık $\}$ olmak üzere, $\mathcal{U}$ tarafından üretilen topolojiye F tarafından üretilen topoloji denir ve $\sigma(X, F)$ ile gösterilir. Bu topoloji aşağıdaki tanım anlamında bir grup topolojisidir.

Tanım 3.4. Bir vektör uzayının, toplamaya uyumlu ve

$$x \to -x$$

fonksiyonlarını sürekli yapan topolojiye ***grup topolojisi*** denir.

Alıştırma 3.5. $\mathbb{R}$ vektör uzayında aşağıdaki özellikleri sağlayan τ_1 ve τ_2 topoloji örnekleri veriniz.

i. τ_1 topolojisine göre $(x, y) \to x + y$ sürekli, $x \to -x$ sürekli değil.

ii. τ_2 topolojisine göre $(x, y) \to x + y$ sürekli değil ve $x \to -x$ sürekli.

Alıştırma 3.6. E vektör uzayında tanımlı τ topolojisi için aşağıdakilerini denkliğini gösteriniz.

i. τ group topolojidir.

ii. $(x, y) \to x - y$ fonksiyonu süreklidir.

4 Temel Teorem

"Verilen bir vektör uzayın üzerinde tanımlı ne kadar çok grup topolojisi vardır?" sorusu oldukça anlamlıdır. Bu sorunun yanıtını verebilmek için basit vektör uzaylardan başlamak anlamlı olabilir. En basit vektör uzayı olarak sıfır vektör uzayını alırsak, bu uzayın üzerinde sadece bir tane grup topolojisi vardır. $E = \mathbb{R}$ üzerinde de hemen iki tane farklı grup topolojisi örneği verebiliriz: $d(x, y) = |x-y|$ metriği tarafından üretilen topoloji ve $\tau = \wp(X)$ topolojisi. Peki, bunlardan başka var mıdır? Hem de çok var, açık seçik yazamasak da. Bu yazının temel amacı şudur:

Teorem 4.1. *$\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ vektör uzayında tanımlı grup topolojilerin kümesi olmak üzere,*

$$|\mathcal{T}| = 2^{2^c}$$

olur.

Bu teoremin kanıtı için biraz daha hazırlık yapmaya devam edelim.

5 Vektör Uzayında Tanımlı Grup Topolojilerinin Sayısı

Bir E vektör uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı f fonksiyonu her x,$y \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ ve } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

özelliğini sağlıyorsa f'ye ***fonksiyonel*** denir. E'nin fonksiyonellerinin kümesi E^* ile gösterilir. E^* noktasal cebirsel işlemler altında vektör uzaydır ve E'nin ***cebirsel duali*** olarak adlandırılır. E ve F iki vektör uzayı olmak üzere $\varphi : E \times F \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $a \in E$ ve $b \in F$ için

$$x \mapsto \varphi(x, b) \text{ ve } y \mapsto \varphi(a, y)$$

olarak tanımlanan fonksiyonlar fonksiyoneller ise, ***ikili fonksiyonel*** olarak isimlendirilir.

Alıştırma 5.1. E bir vektör uzayı olmak üzere,

$$\varphi(x, f) = f(x)$$

eştliğiyle tanımlanan fonksiyonun $E \times E^*$ çarpım uzayında ikili fonksiyonel olduğunu gösterin. Ayrıca, verilen bir $x \in E$ ve her $f \in E^*$ için $\varphi(x, f) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $x = 0$ olması gerektiğini gösterin. Benzer biçimde, verilen bir $f \in E^*$ ve her $x \in E$ için $\varphi(x, f) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $f = 0$ olması gerektiğini gösterin.

Aşağıdaki önemli ve kanıtı oldukça kolay olan teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Alıştırma 5.2. E vektör uzayı bir norm topolojisiyle donatısın. $f \in E^*$ için aşağıdakiler denktir.

i. f süreklidir.

ii. Her $x \in E$ için $|f(x)| \leqslant M||x||$ özelliğinde $M > 0$ vardır.

$f \in E^*$'nin ***çekirdeği*** $f^{-1}(0)$ olarak tanımlanır ve $ker(f)$ ile gösterilir. Okur aşağıdaki teoreme aşina olmayabilir.

Teorem 5.3. *E vektör uzayı olmak üzere $f,\ f_1, ..., f_n \in E^*$ verilsin. Aşağıdakiler denktir.*

i. $f \in span(\{f_1, ..., f_n\})$.

ii. $\bigcap_{i=1}^{n} ker(f_i) \subset ker(f)$.

Kanıt. (i)'in gerçeklendiğini varsayalım. $u : E \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$u(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$$

eşitliğiyle tanımlansın. $u(X)$, $\mathbb{R}^n$'nin bir vektör altuzayıdır. $u(a) = u(b)$ olması durumunda her $1 \leqslant i \leqslant n$ için $a - b \in ker(f_i)$ olacağından, $a - b \in ker(f)$ ve dolayısıyla $f(a) = f(b)$ olur. Bu gözlemin sonucu olarak

$$v : u(X) \to \mathbb{R},\ v(u(x)) = f(x)$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. v'nin $\mathbb{R}^n$'ye bir $\overline{v}$ genişlemesi vardır. her $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\overline{v}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

olacak biçimde $\lambda_i \in \mathbb{R}$'ler de bulunur. Şimdi

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

olduğu da açık.

Gerektirmenin diğer yönüde açık. Kanıt tamamlanır.

Vektör uzayın boyutuyla cebirsel dualinin boyutu arasındaki ilişi aşağıdaki gibirdir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teorem 5.4. *(Erdös-Kaplansky Theoremi) E vektör uzay olsun.*

$$dim(E^*) = 2^{dim(E)}$$

olur.

Bir vektör uzayında tanımlı birçok grup topolojisi üretilebilir.

Teorem 5.5. *E bir normlu uzay ve Φ, E^*'nin bir vektör alt uzayı olsun. $\sigma(E,\Phi)$ bir grup topolojisidir.*

Kanıt. $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi(x,y) = x + y$ olarak tanımlansın.

$f_1,...,f_n \in \phi$, $x_1,...,x_n \in E$ ve $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n > 0$ verilsin.

$$U = \varphi^{-1}(\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}((x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)))$$

diyelim.

$$\begin{aligned} U &= \bigcap_{i=1}^n \{(x,y) : x + y \in f_i^{-1}(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{(x,y) : x_i - \varepsilon_i < f_i(x) + f_i(y) < x_i + \varepsilon_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{\delta \in (0,\varepsilon_i)} \{(x,y) : x_i - \delta < f_i(x) < x_i + \delta, -\varepsilon_i + \delta < f_i(y) < \varepsilon_i - \delta\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{\delta \in (0,\varepsilon_i)} f_i^{-1}((x_i - \delta, x_i + \delta)) \times f_i^{-1}((-\varepsilon_i + \delta, \varepsilon_i - \delta)) \end{aligned}$$

olur. V, $\sigma(E,\Phi)$'de açık olsun. V, yukarıda tanımlanan U kümelerinin birleşimi olarak yazılabileceğinden $\varphi^{-1}(V)$ kümesi $E \times E$ uzayında açıktır. Ayrıca E'den E'ye tanımlı $x \mapsto -x$ fonksiyonunun $\sigma(X,\Phi)$ topolojisine göre sürekliliği de açıktır. Böylece kanıt tamamlanır.

E vektör uzayında tanımlı grup topolojilerinin çokluğu aşağıdaki teoremle test edilebilir.

Teorem 5.6. *E bir vektör uzayı ve B, E'nin cebirsel duali olan E^*'ın tabanı olsun. Her R, $S \subset B$ için, aşağıdakiler denktir.*

i. *$R = S$.*

ii. *$span(S) = span(R)$.*

Kanıt. $(i \implies ii)$ olduğu açık. (ii)'nin gerçeklendiğini varsayalım. $f \in R$ verilsin. f, $\sigma(E, span(R))$ topolojisine göre süreklidir ve varsayım gereği $\sigma(E, span(S))$ topolojine göre de sürekli olur. Dolayısıyla $f^{-1}((-1,1)) \in \sigma(E, span(S))$ gerçeklenir. Tanımı gereği

$$\cap_{i=1}^n ker(f_i) \subset \cap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i) \subset f^{-1}((-1,1))$$

özelliğinde $f_i \in span(S)$'ler vardır. Üstelik

$$\cap_{i=1}^n ker(f_i) \subset f^{-1}((-1,1))$$

özelliğindeki f_i'leri S kümesinden seçebiliriz (neden?). Theorem 2.1 uyarınca $f \in span(S)$ olur. Yani $span(R) \subset span(S)$ olduğu gösterilmiş olunur. Kapsamanın diğer yönü de benzer biçimde elde edilir. Dolayısıyla $span(R) = span(S)$ olduğu gösterilmiş olunur.

Bir E vöktör uzayı için Erdös-Kaplansky Teoremi'nden $dim(E^*) = 2^{dim(E)}$ olduğundan, E'de tanımlı grup topolojilerinin sayısı $2^{2^{dim(E)}}$'den büyük ya da eşittir. Bu ve yukarıdaki teoremim sonucu olarak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.7. *E bir vektör uzayı olsun. $|E| = dim(E)$ ise E'de tanımlı grup topolojilerinin kardinalitesi $2^{2^{|E|}}$ olur.*

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.8. *E vektör uzayı olsun. E'deki grup topolojileri kümesinin kardinalitesi $2^{dim(E^*)}$'den büyük ya da eşittir.*

6 c_0 Dizi Uzayının Cebirsel Boyutu

Belli bir terimden sonraki bütün terimleri sıfır olan dizilerin kümesini c_{00} ile gösterelim. Yani $(x_n) \in c_{00}$ olması için gerekli ve yeterli koşul, her $n \geqslant m$ için $x_n = 0$ olacak biçimde m olmasıdır. Ayrıca sınırlı dizilerin kümesini l_∞ ile gösterelim. c, yakınsak dizilerin kümesini ve c_0, sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi olsun. Noktasal cebirsel işlemler altında, l_∞ kümesi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$'nin, c_0 kümesi l_∞'un, c_{00} kümesi c_0'ın, ve c_0 da c'nin vektör altuzayıdır.

Alıştırma 6.1. c ve c_0 vektör uzaylarının izomorfik olduklarını gösterin.

c_{00} vektör uzayının boyutu $\aleph_0$ olduğundan, c_0 vektör uzayının boyutu en az $\aleph_0$'dır. Ayrıca $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$ (neden?) olduğundan, c_0'ın boyutu en fazla c olur. Dolayısıyla c_0'ın boyutu $\aleph_0$ ya da $\mathfrak{c}$ olur. İkiye indeirgenen bu durumu bire de indirebileceğiz.

c_0, l_∞'un vektör altuzayı olmasına karşın, l_∞, c_0'ın bir vektör altuzayına izomorfiktir. Bu ilginç durumu teorem olarak vermeden önce iki noktayı alıştırmalar başlığıyla hatırlayalım.

Alıştırma 6.2. F, E'nin bir vektör altuzayı ve $f : F \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olsun. f'nin bir $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel genişlemesinin var olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 6.3. F, E normlu uzayının altuzayı olsun. $f : F \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonel ise f'nin bir sürekli $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonel genişlemesinin var olduğunu gösteriniz.

$(E, ||.||)$ normlu uzay olsun. (x_n), E'de bir dizi olmak üzere, verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$n \geqslant m \Leftrightarrow ||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

olacak biçimde m varsa (x_n) dizisine ***Cauchy*** denir; eğer E'deki her Cauchy dizisi yakınsak ise, E bir ***Banach uzayı*** **olarak adlandırılır.**

Alıştırma 6.4. $||(x_n)||_\infty = \sup_n |x_n|$ normuna göre c_0, c ve l_∞'un Banach uzayları olduklarını gösterin.

Alıştırma 6.5. $||(x_n)||_\infty = \sup_n |x_n|$ normuna göre c_{00}'ın Banach uzayı olmadığını gösterin.

Teorem 6.6. *(Mackey [6]) E sonsuz-boyutlu birm Banach uzayı ise, l_∞ uzayı E'nin bir vektör altuzayına izomorfiktir.*

Kanıt. Bu kanıtta yer alan normlu bir uzayaın kapalı bir altuzayının ne olduğunun bildiğini varsayıyoruz. Ayrıca bir normlu uzaydan tanımlı sürekli bir fonksiyonelin çeirdeğinin kapalı olduğunu da bilelim. E sonsuz boyutlu olduğundan,

$$x_1 \in E \setminus Ker(f) \text{ ve } ||x_1|| = 1$$

özelliğinde sürekli bir $f : E \to \mathbb{R}$ seçebiliriz.

$$M_1 = Ker(f)$$

diyelim. M_1'in sıfırdan farklı olması nedeniyle,

$$x_2 \in M_1 \setminus Ker(f_2) \text{ ve } ||x_2|| = \tfrac{1}{2}$$

özelliğinde sürekli bir $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ ve bir $x_2 \in E$ de seçebiliriz.

$$M_2 = Ker(f_1)$$

diyelim. Bu argüman kullanılarak E'nin kapalı ve (kapsamaya göre) azalan (M_n) altuzay dizisini ve her n için $x_n \in M_1$ ve her $n \geqslant 2$ için

$$x_n \in M_{n-1} \setminus M_n$$

özelliğinde (x_n) dizisi elde edilir. $(\lambda_n) \in l_\infty$ verilsin. Her n için

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

olarak tanımlanan (y_n) dizisi X'de bir Cauchy dizisidir. E Banach uzayı olduğundan bu dizi yakınsaktır ve yakınsadığı noktayı $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_k$ ile gösterelim. Böylece l_∞'dan E'ye

$$(\lambda_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Bu fonksiyonu φ ile gösterelim. φ'nin lineer olduğunu göstermek kolay. Birebir olduğunu gösterelim. $\varphi(\lambda_n) = 0$ olsun. Buradan M_2 kapalı olduğundan

$$-\lambda_1 x_1 = \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda_n x_n) \in M_2$$

olur. $x_2 \notin M_2$ olacağından $\lambda_1 = 0$ olur. Aynı argüman kullanılarak $(\lambda_n) = (0)$ olduğu görülür. Yani φ birebirdir. Bu kanıtı tamamlar.

Alıştırma 6.7. Her $0 < t < 1$ için $f_t \in l_\infty$ fonksiyonu $f_t(n) = t^n$ olarak tanımlansın. $\{f_t : 0 < t < 1\}$ kümesinin l_∞ uzayının içinde doğrusal bağımsız olduğunu gösterin. Ayrıca $dim(l_\infty) = c$ olduğunu da gösterin.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.8. *$dim(c) = \mathfrak{c}$ olur.*

Kanıt. c Banach uzayı olduğundan l_∞, c'nin bir altuzayına izomorfiktir. Buradan

$$\mathfrak{c} = dim(l_\infty) \leqslant dim(c) \leqslant |c| \leqslant \mathfrak{c}$$

eşitsizliğinden $dim(c) = \mathfrak{c}$ elde edilir.

Alıştırma 6.9. $dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}$ olduğunu gösterin.

7 "Aaa Ne Kadar İlginç" Dedirten Bir Durum

Aşağıdaki soruyla başlayalım.

Alıştırma 7.1. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \neq m$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ vektör uzaylarının izomorfik olmadıklarını gösteriniz.

Dolayısıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ vektör uzayları izomorfik değillerdir. Buna karşın "Aaaa ne kadar ilginç" dedirtecek bir soru hizmetinizde...

Alıştırma 7.2. (Ward) $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{R}^2, +)$ gruplarının izomorfik olduklarını gösterin.[4]

Aslında yukarı soruda verilen sorunun çok daha genel bir hâli de doğru.

Teorem 7.3. *(Chuan-Liu [2]) E bir vektör uzayı ve $dim(E) \leqslant \mathfrak{c}$ olsun. O zaman E ve $\mathbb{R}$ grup izomorfiktirler.*

Kanıt. A, E'nin bir tabanı ve $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$ vektör uzayı olarak bir tabanı $B \subset \mathbb{R}$ olsun. Dolayısıyla

$$E = \oplus_{a \in A} \mathbb{R}$$

ve

$$\mathbb{R} = \oplus_{a \in B} \mathbb{Q}$$

yazabiliriz. Buradan da

$$E = \oplus_{c \in AB} \mathbb{Q}$$

olduğu bâriz. Diğer taraftan

$$\mathfrak{c} = |B| \leqslant |AB| \leqslant \mathfrak{c}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

olduğundan

$$|AB| = \mathfrak{c}$$

olur. Buradan da, Alıştırma 2.1 kullanılarak, $\mathbb{R} = \oplus_{b \in B} \mathbb{Q}$ ve $E = \oplus_{c \in AB} \mathbb{Q}$ yapılarının grup izomorfik oldukları kanıtlanmış olur.

8 Teorem 4.1'in Kanıtı

Alıştırma 6.9 gereği

$$dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$$

olur. Sonuç 5.7 gereğince de, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ grubundaki topolojik grupların sayısı 2^{2^c} olur. Teorem 7.3 kullanıldığında da, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ve $\mathbb{R}$ grupları izomorfik olduklarından, $\mathbb{R}$ grubunda tanımlı grup topolojilerinin sayısının 2^{2^c} olduğu gosterilmiş olur.

Aynı küme üzerinde tanımlı iki topolojinin farklı olmasıyla homeomorfik olmamaları farklı kavramlardır. Birbirlerine homemorfik olmayan iki topoloji farklı olmak zorundadır. Aşağıdaki netice, Teorem 4.1'i geneller.

Teorem 8.1. *$\mathcal{T}$, $\mathbb{R}$ grubunda tanımlı grup topolojilerin kümesi olsun. $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ için*

$$\tau_1 \equiv \tau_2 \Longleftrightarrow \tau_1 \text{ ve } \tau_2 \text{ homeomorfik}$$

olarak tanımlana $\equiv$, bir denklik bağıntısıdır. $[\tau]$, $\tau \in \mathcal{T}$'nin denklik sınıfı olmak üzere

$$|\{[\tau] : \tau \in \mathcal{T}\}| = 2^{2^c}$$

olur.

[4] Ward tarafından sorulan bu soru Amer. Math. Monthly dergisinde 5013'üncü sorudur. Bu soruya verilen yanıtlardan biri ([7]) Ward ve Ellis'e aittir.

Kanıt.

$$[\mathcal{T}] = \{[\tau] : \tau \in \mathcal{T}\}$$

olmak üzere, her $\tau \in \mathcal{T}$ için $|[\tau]| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$ olduğundan (neden?),

$$2^{2^c} = |\mathcal{T}| = |\cup_{[\tau]\in[\mathcal{T}]} [\tau]| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}|[\mathcal{T}]|$$

gerçeklenir. Buradan da,

$$2^{2^c} \leqslant |[\mathcal{T}]|$$

olur. Ayrıca

$$|[\mathcal{T}]| \leqslant 2^{2^c}$$

olduğundan kanıt tamamlanır.

9 Yerel Konveks Hausdorff Uzaylarının Sayısı

Aşağıdaki problem okuyucu tarafından kolaylıkla çözülebilir.

Alıştırma 9.1. E bir vektör uzayı ve Φ, E^* vektör uzayının bir altuzayı olsun. Her $f \in E^*$ için $\varphi_f \in E^*$,

$$\varphi_f(x) = |f(x)|$$

olarak tanımlansın. $\{\varphi_f : f \in \Phi\}$ tarafından üretilen topoloji $\sigma(E, \Phi)$'ye eşittir.

Bir E vektör uzayından $\mathbb{R}$'ye tanımlı bir p fonksiyonu norm olma koşullarından

$$p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

dışındaki koşulları sağlıyorsa p'ye ***yarı-norm*** denir. Her $f \in E^*$ için

$$\varphi_f(x) = |f(x)|$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir yarı-norm olur. $(p_i)_{i\in I}$, E üzerindeki yarı-normların bir ailesiyse bu yarı-normlar tarafından üretilen toplojiye ***yarı-normlar topolojisi*** denir. Yukarıdaki son problemde geçen E^*'nün her Φ altuzayı için, $\sigma(X, \Phi)$ bir yarı-normlar topolojisidir.

Alıştırma 9.2. Bir E vektör uzayında tanımlı her yarı-normlar topolojisi bir grup topolojisidir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı oldukça kolaydır ve bu nedenle okuyucuya bırakılmıştır.

Teorem 9.3. *$\mathbb{R}$'de tanımlı, birbirlerine homeomorfik olmayan yarı-normlar topolojilerinin sayısı $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ olur.*

Topolojideki önemli kavramlardan birisi de Hausdorff özelliğidir. Bir X topolojik uzayındaki birbirinden farklı her x ve y noktası için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak biçimde ayrık ve açık U ve V kümeleri varsa, X'e bir ***Hausdorff uzayı*** denir.

Alıştırma 9.4. X vektör uzay üzerinde τ, $(p_i)_{i\in I}$ yarı-normlarınca belirlenen yarı-norm topolojiyle donatılsın. Aşağıdakilerin denk olsuğunu gösterin.

i. X bir Hausdorff uzayıdır.

ii. $x \in X$ olmak üzere, her $i \in I$ için $p_i(x) = 0$ olduğunda $x = 0$ olur.

Madem ki Hausdorff olmak önemlidir ve yarı-norm topolojileri doğal yapılardır, o hâlde $\mathbb{R}$'de ne kadar çok Hausdorff yarı-norm topolojisinin var olduğunu anlamak yerindedir. E bir normlu uzay ve $E^{'}$, E'nin norm duali, yani E'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı sürekli fonksiyonellerin vektör uzayı olsun. $X^{'}$ kümesi,

$$||f|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} |f(x)|$$

normu ile donatıldığında bir Banach uzayıdır. Ayrıca $x \in X$ olmak üzere, her $f \in X^{'}$ için $f(x) = 0$ ise $x = 0$ olmak zorundadır. Bu klasik sonuçlar AVM'ler dışında birçok yerde bulunabilir. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektör uzayının bir altuzayı olan

$$l_1 = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n| < \infty\}$$

kümesi de

$$||(x_n)|| = \sum_n |x_n|$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Alıştırma 9.5. $dim(l_1) = \mathfrak{c}$ olduğunu gösterin.

Alıştırma 9.6. Her $(x_n) \in l_1$ ve $(a_n) \in c_0$ için

$$\phi((x_n))((a_n)) = \sum_n a_n x_n$$

olarak tanımlanan $\phi : l_1 \to c_0^{'}$ fonksiyonunun bir izomorfizma olduğunu ve $||\varphi((x_n)|| = ||(x_n)||$ eşitliğinin sağlandığını gösterin.

Teorem 9.7. *c_0 üzerinde tanımlı Hausdorff yarı-norm topolojilerin sayısı $2^{2^{\mathfrak{c}}}$'dir.*

Kanıt. A, l_1'in tabanı ve $A \subset B$ olacak biçimde, c_0^*'ın bir B tabanını seçebiliriz.

$$|A| = \mathfrak{c} \text{ ve } |B| = 2^{\mathfrak{c}}$$

olduğundan,

$$|\{S : A \subset S \subset B\}| = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$$

olur. Dolayısıyla

$$|\{span(S) : A \subset S \subset B\}| = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$$

gerçeklenir. Ayrıca $A \subset S \subset B$ için $\sigma(c_0, span(S))$ yapısı bir Hausdorff yarı-norm topolojisidir. Bu gözlem de kanıtı tamamlar.

c_0 ve $\mathbb{R}$'nin grup izomorfik oldukları kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 9.8. *$\mathbb{R}$ vektör uzayında birbirlerine homeomorfik olmayan Hausdorff grup topolojilerinin sayısı $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ olur.*

Yaşca benden epey küçük olup bu konuyla ilgilenenler "Zafer abi, ne güzel anlattın, hepsi bu kadar mı?" diye soruyor olabilirler. Devam edeceğiz çocuklar ve burada da kalmayacağız; Nâzım yoldaşın dediği gibi, "Motorları maviliklere süreceğiz çocuklar."

Kaynaklar

[1] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warszawa, 1932.

[2] Jên Chung Ch'üan & Li Liu, "Group topologies on the real line," *J. Math. Anal. Appl.* **81** (1981), no. 2, 391–398.

[3] M. Çağlar & Z. Ercan, "Hamel tabanı ve Boyut Teoremi," *Matematik Dünyası*, 2014-III, 78–83.

[4] G. Hamel, "Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x) + f(y) = f(x + y)$," *Math. Ann.* **60** (1905), no. 3, 459–462.

[5] H. Löwig, "Über die Dimension linearer Räume," *Studia Math.* **5** (1934), 18–24.

[6] George W. Mackey, "On infinite dimensional linear spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* **57** (1945), 155–207.

[7] L.E., Jr. Ward & J.W. Ellis, "Additive Isomorphism," [Advanced Problems and Solutions: Solutions: 5013], *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), no. 4, 447.